OLIMPÍADA BRASILEIRA DE FÍSICA – 2004

3ª Fase – 1º e 2º anos – Gabarito

QUESTÃO 1 (somente para 1º ano)

v_o = 64,8 km/h = 18,0 m/s

v_{ox} = 18,0 cosθ = (18,0).(0,8) = 14,4 m/s

v_{oy} = 18,0 senθ = (18,0).(0,6) = 10,8 m/s

a) $x = v_{ox}t \Rightarrow 28{,}8 = 14{,}4\,t \Rightarrow t = 2{,}00$ s

$y = y_o + v_{oy}t - gt^2/2 \Rightarrow h = 1{,}50 + (10{,}8).(2{,}00) - 5\,(2{,}00)^2 \Rightarrow h = 3{,}10$ m **(2 pontos)**

b) $v_x = v_{ox} = 14{,}4$ m/s; $v_y = v_{oy} - gt = 10{,}8 - 5.(2{,}00) = 0{,}80$ m/s **(2 pontos)**

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \Rightarrow v = 14{,}4$ m/s

c) $y = y_o + v_{oy}t - gt^2/2 \Rightarrow 0 = 1{,}50 + (10{,}8).t - 5\,t^2 \Rightarrow t = 2{,}29$ s

$x = v_{ox}t \Rightarrow x = (14{,}4).(2{,}29) \Rightarrow x = 33{,}0$ m **(2 pontos)**

QUESTÃO 2 (somente 1º ano)

a) $L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow I_1.2\pi f_1 = I_2.2\pi f_2$

$$\frac{MR^2}{2}f_1 = \frac{M\left(\frac{R}{2}\right)^2}{2}f_2 \Rightarrow \frac{f_1}{2} = \frac{f_2}{8} \Rightarrow f_2 = 2\text{ Hz}$$

$n = f_2\Delta t = 2.15 = 30$ voltas. **(4 pontos)**

b) Como o momento de inércia não depende da espessura do disco, o segundo disco deve ser mais grosso. **(2 pontos)**

QUESTÃO 3 (1º e 2º anos)

v_A = 43,2 km/h = 12 m/s; v_B = 57,6 km/h = 16 m/s

Posição do veículo *A*: $x_A = 12.t$; $y_A = 300$

Posição do veículo *B*: $x_B = 400$; $y_B = 16.t$ **(2 pontos)**

Distância ao quadrado entre os dois veículos:

$$d^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (12t - 400)^2 + (300 - 16t)^2 = 400t^2 - 19200t + 250000$$

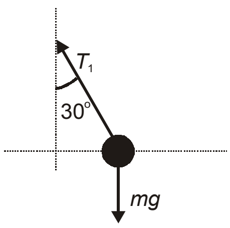
A distância *d* será mínima no mínimo da parábola:

$$t_{min} = \frac{-b}{2a} = \frac{19200}{800} = 24\text{ s}$$ **(2 pontos)**

Distância mínima: $d_{min} = 10 \cdot \sqrt{4.(24)^2 - 192.(24) + 2500} = 140$ m. **(2 pontos)**

QUESTÃO 4 (1º e 2º anos)

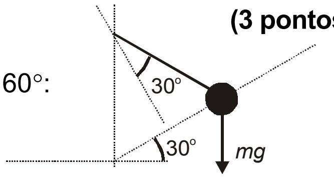
Pista plana: v_p = 72 km/h = 20 m/s



Decompondo as forças que atuam no enfeite: $T_1 \cos 30^\circ = mg$ e $T_1 \operatorname{sen} 30^\circ = \dfrac{mv_p^2}{R} \Rightarrow v_p^2 = Rg.\tan 30^\circ$

(3 pontos)

Na pista inclinada, o ângulo entre a tensão no fio e a vertical passa a ser de 60°:



e podemos escrever: $v_i^2 = Rg.\tan 60^\circ$. Logo: $v_i^2 = 3.v_p^2 \Rightarrow v_i = v_p\sqrt{3} \Rightarrow v_i = 20\sqrt{3}$ m/s **(3 pontos)**

QUESTÃO 5 (somente para 1º ano)

Isolando cada corpo temos:

(a) Sobre o bloco de massa m: $ma = kx$

(b) Sobre o carrinho de massa M: $Ma = T - kx$

(c) Sobre o bloco de massa m_B: $m_B a = m_B g - T$

Somando as três equações encontramos que: $(M + m + m_B)a = m_B g$ **(3 pontos)**

Da primeira equação: $a = \dfrac{kx}{m} \Rightarrow (M + m + m_B)\dfrac{kx}{m} = m_B g$

$(M+m)\dfrac{kx}{m} = m_B\left(g - \dfrac{kx}{m}\right) \Rightarrow m_B = \dfrac{M+m}{mg-kx}kx$ **(3 pontos)**

QUESTÃO 6

(a) Conservação de energia, entre o topo e um instante antes da colisão:

$mgH + \dfrac{1}{2}mu_0^2 = mgh + \dfrac{1}{2}mv_0^{\prime\,2} \Rightarrow T_{Antes} = \dfrac{1}{2}mu_0^2 + mg(H-h)$

Energia cinética logo após colisão é: $T_{Após} = \dfrac{1}{2}mv_0^2 + \dfrac{1}{2}MV^2$

Como a colisão é elástica então: $T_{Após} = T_{Antes} \Rightarrow v_0^2 - u_0^2 = 2g(H-h) - \dfrac{M}{m}V^2$ (1) **(1 ponto)**

Conservação do momentum na direção horizontal: $mu_0 = MV - mv_0 \Rightarrow v_0 + u_0 = \dfrac{M}{m}V$ (2)

As equações (1) e (2) podem ser reescritas como

$v_0^2 - u_0^2 = 2\cdot 10\cdot 0{,}45 - 5\cdot 36 = -171$ (3)

$v_0 + u_0 = 30$ (4)

Dividindo (3) por (4) encontramos,

$v_0 - u_0 = -5{,}7$ (5)

Somando (4) com (5) temos que $2v_0 = -24{,}3$, logo $v_0 = 12{,}15$ m/s e portanto $u_0 = 17{,}85$ m/s. **(2 pontos)**

(b) Antes de colidir com a cunha o bloco tem um lançamento horizontal cuja equação da trajetória é:

$y(x) = H - \dfrac{gx^2}{2u_0^2}$ logo o distância horizontal percorrida até atingir a cunha em x_c foi,

$x_c = u_0\sqrt{\dfrac{2(H-h)}{g}} = 17{,}85\sqrt{\dfrac{2\cdot 0{,}45}{10}} = 17{,}85\cdot 0{,}3 = 5{,}36$ m **(1 ponto)**

Após colidir com a cunha o bloco tem um lançamento horizontal cuja a equação da trajetória é: $y(x) = h - \dfrac{g(x-x_c)^2}{2v_0^2}$ logo o distância d da plataforma será $d = x_A$, o qual é dado por:

$x_A = x_c - v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 5{,}36 - 12{,}15\sqrt{\dfrac{2\cdot 0{,}05}{10}} = 5{,}36 - 1{,}22 = 4{,}14$ m **(2 pontos)**

QUESTÃO 7 (1º e 2º anos)

Conservação da energia: $\dfrac{mv_o{}^2}{2} = \dfrac{mv^2}{2} + mgR(1+\cos\theta) \Rightarrow v^2 = v_o{}^2 - 2gR(1+\cos\theta)$ (1) **(2 pontos)**

Movimento de projétil entre as extremidades:

posição na horizontal: $x = v\cos\theta t$

instante da altura máxima: $v_y = v\,\mathrm{sen}\,\theta - gt$; $v_y = 0 \Rightarrow t_{H_{\max}} = \dfrac{v\,\mathrm{sen}\,\theta}{g}$

alcance: $2R\,\mathrm{sen}\,\theta = v\cos\theta\cdot 2\dfrac{v\,\mathrm{sen}\,\theta}{g} \Rightarrow v^2 = \dfrac{Rg}{\cos\theta}$

Substituindo em (1):

$\dfrac{Rg}{\cos\theta} = v_o{}^2 - 2gR(1+\cos\theta) \Rightarrow v_o = \sqrt{\dfrac{gR}{\cos\theta}\left(1 + 2\cos\theta + 2\cos^2\theta\right)}$ **(4 pontos)**

QUESTÃO 8

(a) Da segunda lei de Newton temos que a força resultante sobre m é: $F_R = ma = -\frac{GM'm}{x^2}$, onde M' é a massa somente da camada interna da esfera. Para uma distribuição uniforme de massa temos que a razão entre a massa M' e a massa total da Terra M é:

$\frac{M'}{M} = \frac{\rho V'}{\rho V} = \frac{V'}{V} = \left(\frac{x}{R}\right)^3$, logo $M' = \left(\frac{x}{R}\right)^3 M$, assim têm-se que $F_R = -m\left(\frac{GM}{R^2}\right)\frac{x}{R}$ como queríamos mostrar. Usando o fato de que $g = \frac{GM}{R^2}$, temos $F_R = -m\frac{g}{R}x$. **(3 pontos)**

(b) Temos então que a partícula está sujeita a uma força que obedece a lei de Hooke. O trabalho para ir da superfície da Terra até o seu centro é numericamente igual a área da força em função da distância, ou seja, $\tau = \frac{1}{2}mgR$.

Devido ao teorema trabalho energia, o trabalho da força resultante é igual a variação da energia cinética, assim: $\frac{1}{2}mgR = \frac{1}{2}mv^2$, logo $v = \sqrt{gR} = \sqrt{10 \cdot 6400 \cdot 1000} = 8000$ m/s. **(3 pontos)**

QUESTÃO 9 (1º e 2º anos)

Primeiro choque:

Conservação do momento linear: $mv = mv' + MV'$

Inversão da velocidade relativa: $0 - v = -(V' - v') \Rightarrow v' = V' - v$

$$mv = mV' - mv + MV' \Rightarrow V' = \frac{2mv}{m+M}$$ **(2 pontos)**

Segundo choque:

Como o segundo choque também é elástico, podemos encontrar a velocidade v'' da terceira bola aplicando a fórmula que deduzimos no primeiro choque com as substituições: $V' \to v''$, $v \to V'$, $m \to M$, $M \to m$:

$$v'' = \frac{2MV'}{M+m}$$

Substituindo o valor de V' do primeiro choque temos: $v'' = \frac{4mMv}{(M+m)^2}$ **(2 pontos)**

$$v'' = \frac{8}{9}v \Rightarrow \frac{4mMv}{(M+m)^2} = \frac{8}{9}v \Rightarrow 9mM = 2M^2 + 4mM + 2m^2 \Rightarrow 2M^2 - 5mM + 2m^2 = 0$$

$$M = \frac{5m \pm \sqrt{25m^2 - 16m^2}}{4} = \frac{5m \pm 3m}{4} \Rightarrow M = 2m \quad \text{ou} \quad M = \frac{m}{2}.$$ **(2 pontos)**

Ambas as respostas são válidas. No primeiro caso, a bola do meio colide com a última e prossegue com velocidade no mesmo sentido. No segundo caso, ela colide e recua.

QUESTÃO 10 (somente para 1º ano)

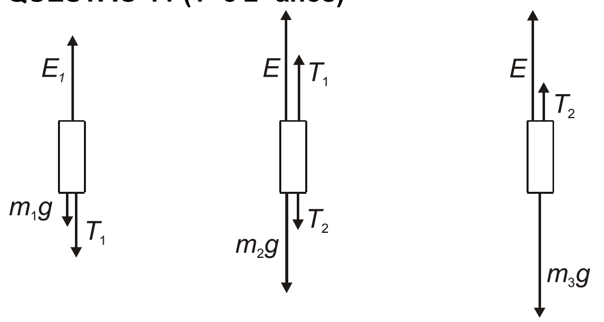
a) Em x = 2,5 m $\Rightarrow$ E_{cin} = 8 J = $\frac{1}{2}mv_4^2$ $\Rightarrow$ v_4 = 4 m/s **(2 pontos)**

b) Em x = 0 m $\Rightarrow$ E_{cin} = 2 J = $\frac{1}{2}mv_0^2$ $\Rightarrow$ v_0 = 2 m/s

Em x = 6 m $\Rightarrow$ E_{cin} = 0 J = $\frac{1}{2}mv_6^2$ $\Rightarrow$ v_6 = 0 m/s

O módulo do impulso é dado por: $I = \Delta p = mv_6 - mv_0 = 0 - 2 = -2N.s$ **(4 pontos)**

QUESTÃO 11 (1º e 2º anos)



Seja x o comprimento da parte submersa do cilindro da superfície.

Empuxos: $E_1 = \rho g x A$ *e* $E = \rho g h A$

Massas: $m_1 = \rho_1 hA$; $m_2 = \rho_2 hA$; $m_3 = \rho_3 hA$

Equações de equilíbrio:

$$E_1 - T_1 - m_1 g = 0$$
$$E + T_1 - T_2 - m_2 g = 0$$
$$E + T_2 - m_3 g = 0$$

Substituindo as massas e os empuxos:

$$\rho g A x - T_1 - \rho_1 g A h = 0$$
$$\rho g A h + T_1 - T_2 - \rho_2 g A h = 0$$
$$\rho g A h + T_2 - \rho_3 g A h = 0$$

$$\rho g A(x + 2h) = gAh(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) = \rho g A h(0{,}3 + 1{,}1 + 1{,}2) = 2{,}6\rho g A h \quad \Rightarrow \quad x + 2h = 2{,}6h \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}6h$$ **(2 pontos)**

$$T_1 = Ag(\rho x - \rho_1 h) = \rho g A h(0{,}6 - 0{,}3) = 0{,}3\rho g A h$$ **(2 pontos)**

$$T_2 = Ahg(\rho_3 - \rho) = \rho g A h(1{,}2 - 1) = 0{,}2\rho g A h$$ **(2 pontos)**

QUESTÃO 12 (1º e 2º anos)

A primeira condição de equilíbrio se estabelece quando a força no apoio *A* é nula e os torques com relação ao ponto *B* se anulam. Sendo x o volume de água transferida e ρ a densidade da água:

$$-(50 - x_{min})\rho g \cdot 0{,}4 + (10 + x_{min})\rho g \cdot 1{,}6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{min} = 2\,\text{L}.$$ **(3 pontos)**

Na segunda condição o sistema está na iminência de girar no sentido anti-horário e a força no apoio *B* é que é nula, bem como os torques com relação ao ponto *A*:

$$-(50 - x_{max})\rho g \cdot 1{,}4 + (10 + x_{max})\rho g \cdot 0{,}6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{max} = 32\,\text{L}.$$ **(3 pontos)**

QUESTÃO 13 (1º e 2º anos)

Equilíbrio antes: $mg + kx = \rho_{Hg_o} V_o g$ (1)

Equilíbrio depois: $mg + k(x + \Delta x) = \rho_{Hg} V_{Pb} g$ (2)

$$(2) - (1) \quad \Rightarrow \quad k\Delta x = \rho_{Hg} V_{Pb} g - \rho_{Hg_o} V_o g$$

Densidade do mercúrio:

$$V_{Hg} = V_{Hg_o}(1 + \beta_{Hg}\Delta T) \quad \Rightarrow \quad \frac{V_{Hg}}{m} = \frac{V_{Hg_o}}{m}(1 + \beta_{Hg}\Delta T) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho_{Hg}} = \frac{1}{\rho_{Hg_o}}(1 + \beta_{Hg}\Delta T) \quad \Rightarrow \quad \rho_{Hg} = \frac{\rho_{Hg_o}}{1 + \beta_{Hg}\Delta T}$$

(2 pontos)

Volume da bola: $V_{Pb} = V_o(1 + 3\alpha_{Pb}\Delta T)$

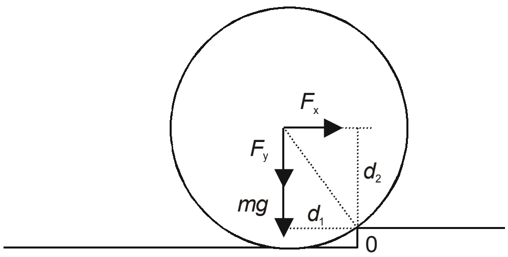
$$\Delta x = \frac{\rho_{Hg_o} V_o g}{k}\left(\frac{1+3\alpha_{Pb}\Delta T}{1+\beta_{Hg}\Delta T}-1\right) \cong \frac{\rho_{Hg_o} V_o g}{k}\left(3\alpha_{Pb}-\beta_{Hg}\right)\Delta T \; ; \qquad \beta_{Hg}\Delta T \prec\prec 1$$

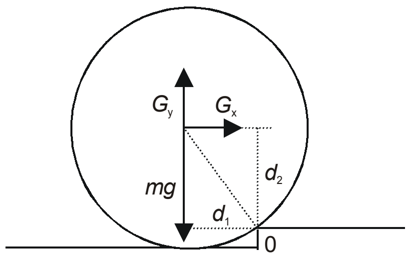
$$\Delta x = \frac{13{,}6\cdot 10^3\cdot 10^{-3}}{250}\left(3\cdot 2{,}9-18\right)10^{-5}\cdot 200 = -1{,}0\cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

A bola desce 1,0 mm. **(4 pontos)**

QUESTÃO (1º e 2º anos) 14

Na iminência de subir o degrau, a força normal com o chão se anula, bem como os torques em torno do ponto *O*. As forças *F* e *G* podem ser consideradas em termos de suas componentes horizontal e vertical com braços de alavanca, relativos aos ponto *O*, d_2 e d_1, respectivamente.





Equilíbrio dos torques: $mgd_1 + F_y d_1 - F_x d_2 = 0$ **(1 ponto)** $mgd_1 - G_y d_1 - G_x d_2 = 0$ **(1 ponto)**

Braços de alavanca: $d_1 = \sqrt{R^2-(R-h)^2} = \sqrt{20^2-16^2} = 12\,\text{cm}$ **(1 ponto)**

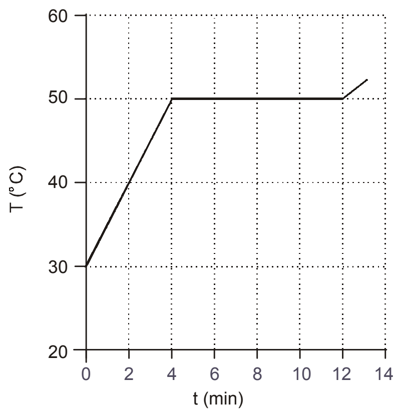
$d_2 = R - h = 20 - 4 = 16$ cm **(1 ponto)**

Forças: $F_x = F_y = G_x = G_y = F\frac{\sqrt{2}}{2} = G\frac{\sqrt{2}}{2}$

$F\frac{\sqrt{2}}{2}(d_2-d_1) = mgd_1 \;\Rightarrow\; F = \frac{d_1\sqrt{2}}{d_2-d_1}mg = \frac{12\cdot 1{,}4}{16-12}2\cdot 10 = 84\ \text{N}$ **(1 ponto)**

$G\frac{\sqrt{2}}{2}(d_2+d_1) = mgd_1 \;\Rightarrow\; G = \frac{d_1\sqrt{2}}{d_2+d_1}mg = \frac{12\cdot 1{,}4}{16+12}2\cdot 10 = 12\ \text{N}$. **(1 ponto)**

QUESTÃO 15 (1º e 2º anos)



De 0 a 4 min o sólido se aquece absorvendo um calor: $\Delta Q_1 = mc\Delta T$ **(1 ponto)**

De 4 a 12 min o sólido se liquefaz consumindo um calor: $\Delta Q_2 = mL$ **(1 ponto)**

Como a potência é constante: $\frac{\Delta Q_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t_2} \;\Rightarrow\; \frac{mc\Delta T}{\Delta t_1} = \frac{mL}{\Delta t_2}$

Calor específico: $c = \frac{L\Delta t_1}{\Delta T\Delta t_2} = \frac{16\cdot 4}{(50-30)(12-4)} = 0{,}4\ \text{cal}$ **(4 pontos)**

QUESTÃO 16

As equações de movimento são dadas por: $T - f_{at} - P\,\text{sen}\theta = 0$

$N - P\cos\theta = 0$

Resolvendo estas equações encontramos que $N = P\cos\theta$ e que $T = (\text{sen}\theta + \mu_c \cos\theta)P$. **(2 pontos)**

A potência do motor é igual a potência da tensão: $P_m = P_T = Tv = (\text{sen}\theta + \mu_c\cos\theta)Pv$. A potência da força de atrito deve ser igual em módulo a potência em que o gelo é derretido. Assim $P_{fat} = -\mu_c Pv\cos\theta$. A massa do gelo derretida em um intervalo de tempo Δt é dada por $m = \lambda \cdot \Delta t$, portanto a potência que o gelo é convertido em água é: $P_g = \dfrac{Q}{\Delta t} = \dfrac{mL}{\Delta t} = \lambda \cdot L$. Como $P_g = -P_{fat}$, temos que $Pv = \dfrac{\lambda \cdot L}{\mu_c \cos\theta}$. **(2 pontos)**

Portanto a potência do motor é:

$$P_m = (\text{sen}\theta + \mu_c\cos\theta)\frac{\lambda \cdot L}{\mu_c\cos\theta} = (0{,}6 + 0{,}8 \cdot 0{,}5)\frac{0{,}25 \cdot 80 \cdot 4{,}18}{0{,}5 \cdot 0{,}8} = \frac{20 \cdot 4{,}18}{0{,}4} = 50 \cdot 4{,}18 \approx 209 \text{ J}$$ **(2 pontos)**

QUESTÃO 17

a) $W_{gás} = -W_{atmosfera} - W_{mola} = p_0\Delta V + \Delta U_{mola} = p_0 A \cdot (x_f - x_0) + \dfrac{1}{2}k\left(x_f^2 - x_0^2\right)$

$$W_{gás} = 10^5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} + \frac{500 \cdot (6{,}25 - 2{,}25) \cdot 10^{-4}}{2} = 10 + 0{,}1 = 10{,}1 \text{ J}$$ **(3 pontos)**

b) A variação da energia interna é: $\Delta U = \dfrac{3}{2}nR\Delta T = Q - W_{gás}$, logo

$$\Delta T = \frac{2(Q - W_{gás})}{3nR} = \frac{2(15{,}1 - 10{,}1)}{3 \times 0{,}1 \times 8{,}31} = \frac{10}{2{,}5} = 4{,}0 \text{ K}$$ **(3 pontos)**

QUESTÃO 18 (1º e 2º anos)

Coeficiente de desempenho: $\dfrac{|Q_f|}{\tau} = 0{,}48 \cdot \dfrac{T_f}{T_q - T_f} = 0{,}48 \cdot \dfrac{273 - 7}{25 - (-7)} = 4$ **(1 ponto)**

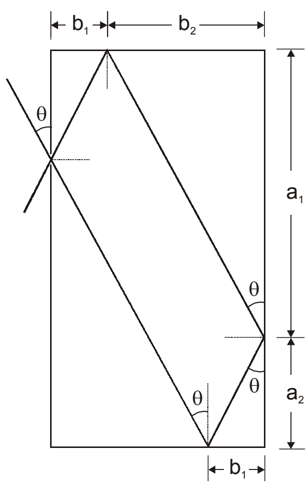
Calor retirado da água: $|Q_f| = mc\Delta T + mL = 480 \cdot 1 \cdot 20 + 480 \cdot 80 = 48000$ cal = 201600 J **(2 pontos)**

Trabalho realizado: $\tau = \dfrac{|Q_f|}{4} = \dfrac{201600}{4} = 50400$ J **(1 ponto)**

Potência: $P = \dfrac{1}{4}hp = \dfrac{746\text{w}}{4} = 186{,}5$ w **(1 ponto)** $\quad P = \dfrac{\tau}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \dfrac{\tau}{P} = \dfrac{50400}{186{,}5} = 270$ s = 4 min e 30 s **(1 ponto)**

QUESTÃO 19 (1º e 2º anos)

Os ângulos que os raios de incidência formam com as normais são iguais aos ângulos que os raios refletidos formam com essas normais. Assim, para que o raio saia pelo orifício, tendo sido refletido apenas uma vez em cada espelho, a sua trajetória tem que descrever o paralelogramo representado na figura.



Tem-se então: $\text{tg}\theta = \frac{b_1}{a_2} = \frac{b_2}{a_1} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \frac{b_1 + b_2}{b_2} = \frac{a_1 + a_2}{a_1} \Rightarrow \frac{b}{b_2} = \frac{a}{a_1} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{b_2}{a_1} = \text{tg}\theta$

$$\theta = \text{arc tg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Independente da posição do orifício. **(6 pontos)**

QUESTÃO 20 (1º e 2º anos)

Equação de Gauss: $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}$

Vergência do olho normal para visão distante:
a distância do objeto é $d_o = \infty$ e a da imagem corresponde à localização da retina d_i = 2 cm

$$V_d = \frac{1}{f} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{0.02} = 0 + 50 = 50\ m^{-1} = 50\text{di}$$ **(1 ponto)**

Vergência do olho normal para visão próxima: d_o = 25 cm e d_i = 2 cm

$$V_p = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{0{,}02} = 4 + 50 = 54\ \text{m}^{-1} = 54\text{di}$$ **(1 ponto)**

Amplitude de acomodação visual: a = 54 – 50 = 4 di **(1 ponto)**

Vergência do olho deficiente: d_o = 4 m e d_i = 2 cm

$$V_{d'} = \frac{1}{f} = \frac{1}{4} + \frac{1}{0{,}02} = 0{,}25 + 50 = 50{,}25\ \text{m}^{-1} = 50{,}25\ \text{di}$$ **(1 ponto)**

Vergência da lente corretora: $V_{d'} + V_L = V_d \Rightarrow V_L = V_d - V_{d'}$ = 50 – 50,25 = – 0,25 di **(1 ponto)**

Uma lente divergente de – 0,25 dioptrias. **(1 ponto)**