ENERGIA CINÉTICA RELATIVÍSTICA

Consideremos uma partícula de massa de repouso m_0 submetida a uma força constante, F, conforme ilustra a figura, a qual parte do repouso e atinge a velocidade v. A energia que a partícula adquire devido ao movimento, isto é, sua

energia cinética, E_c, corresponderá ao trabalho realizado pela força F. Assim,

$$E_c = \int_0^v F dl = \int_0^v \frac{dp}{dt} dl = \int_0^v v dp = \int_0^v v d\left(mv\right) \tag{1}$$

Na mecânica newtoniana, a massa de uma partícula independe de sua velocidade. Logo, 1fica:

$$E_c = \int_0^v vmdv = m \int_0^v vdv = \left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v = \frac{mv^2}{2}, \tag{2}$$

que é a conhecida expressão para a energia cinética newtoniana. Na mecânica relativística, no entanto, a massa, m, depende da velocidade e, em conseqüência, a diferencial $d\left(mv\right)$ não pode ser escrita como mdv. Sendo assim, de 1, segue:

$$E_c = \int_0^v vd\left(mv\right) = \int_0^v v\left(vdm + mdv\right) = \int_0^v v^2 dm + \int_0^v vmdv, \tag{3}$$

onde $m = \gamma m_0 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} m_0$. Calculemos as duas integrais que aparecem ao lado direito em 3.

$$\int_0^v v^2 dm = \int_0^v v^2 d\left(\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} m_0\right) = m_0 \int_0^v v^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{2v}{c^2}\right) dv =$$

$$= m_0 \int_0^v \frac{v^2}{c^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} vdv$$

Façamos $\cos\theta =_{def} \frac{v}{c}$. Logo, $v = c\cos\theta$ e $dv = -c\cos\theta$. Logo,

$$\int_0^v v^2 dm = m_0 \int_0^v \cos^2\theta \left(1-\cos^2\theta\right)^{-\frac{3}{2}} c\cos\theta \left(-c\sin\theta\right) d\theta =$$

$$-m_0c^2 \int_0^v \cos^2\theta \left(\sin^2\theta\right)^{-\frac{3}{2}} c\cos\theta\sin\theta d\theta = -m_0c^2 \int_0^v \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos\theta d\theta$$

Façamos $x =_{def} \sin\theta$. Logo, $dx = \cos\theta d\theta$. Portanto,

$$\int_0^v v^2 dm = -m_0c^2 \int_0^v \frac{1-x^2}{x^2} dx = -m_0c^2 \int_0^v \left(x^{-2}-1\right) dx = -m_0c^2 \left[-x^{-1}-x\right]_0^v$$

$$= m_0c^2 \left[\frac{1+x^2}{x}\right]_0^v = m_0c^2 \left[\frac{1+\sin^2\theta}{\sin\theta}\right]_0^v = m_0c^2 \left[\frac{1+1-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right]_0^v =$$

$$m_0c^2 \left[\left(1+\gamma^{-2}\right)\gamma\right]_0^v = m_0c^2 \left[\gamma+\gamma^{-1}\right]_0^v = m_0c^2 \left(\gamma+\gamma^{-1}-2\right), \qquad (4)$$

pois $\gamma = 1$ quando $v = 0$.

A outra integral no lado direito de 3 é dada por:

$$\int_0^v vmdv = m_0 \int_0^v \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} dv = -m_0c^2 \int_0^v \frac{\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta} d\theta = -m_0c^2 \int_0^v \cos\theta d\theta = -m_0c^2 \left[\sin\theta\right]_0^v$$

Mas, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \gamma^{-1}$. Logo,

$$\int_0^v vmdv = -m_0c^2 \left[\gamma^{-1}\right]_0^v = -m_0c^2 \left(\gamma^{-1}-1\right) = m_0c^2 \left(1-\gamma^{-1}\right) \qquad (5)$$

Somando-se 4 e 5, obtemos:

$$E_c = m_0c^2 \left(\gamma+\gamma^{-1}-2+1-\gamma^{-1}\right) = m_0c^2 \left(\gamma-1\right).$$

Desta última equação, chegamos, finalmente, a:

$$E_c = \gamma m_0c^2 - m_0c^2 = mc^2 - m_0c^2. \qquad (6)$$

O primeiro termo ao lado direito em 6 pode ser encarado como sendo a energia total da partícula em movimento e o segundo termo como sendo a energia total da partícula em repouso. Assim sendo, a enrgia total de uma partícula será dada por:

$$E = mc^2.$$